CONLUIO EM LEILÕES REPETIDOS COM COMUNICAÇÃO SEM CUSTO[1]

Roberto B. Pinheiro
Departamento de Economia
Pontifícia Universidade Católica - RJ
Orientador: Prof. Humberto Moreira (EPGE/FGV)

24 de fevereiro de 2003

[1]Agradeço aos comentários dos profs. Rogério Werneck, Walter Novaes, Juan Pablo Torres-Martinez, Rodrigo Soares, Flávio Menezes e Marcos Antônio Silveira, bem como o auxílio dos mestrandos Nilto Calixto, Klênio Barbosa e Daniel Carvalho. Qualquer erro é de minha responsabilidade.

Abstract

Este trabalho apresenta um modelo de conluio em leilões repetidos de primeiro preço estático, ou seja, um esquema de conluio que usa a mesma regra em toda a fase de cooperação, independente da história do superjogo. Neste ambiente, introduzimos um mecanismo de comunicação sem custo, por meio do qual os jogadores transmitem sua ordenação de preferências sobre os bens a serem leiloados no jogo estágio.

A partir deste modelo, obtemos um aumento da receita esperada agregada por parte dos participantes do leilão frente a um modelo de conluio estático tácito. Além disso, o resultado de dominância do conluio dinâmico com comunicação - esquema no qual a regra de conluio depende de toda a história pública do superjogo - apresentado por Aoyagi (2002), frente a qualquer conluio estático não se verifica.

Outro ponto a se destacar é que o refinamento do sistema de comunicação, por meio de um aumento do número de bens ordenados em cada mensagem, embora leve a um aumento da receita esperada, pode gerar uma elevação da taxa de paciência necessária para a manutenção do conluio.

Palavras Chave: Leilões, Conluio, Jogos Repetidos

JEL: D44, D82, C72, L12

1 Introdução

Nos últimos tempos, a utilização de mecanismos de leilão tem se tornado freqüente nos mais diversos setores da economia. Os processos de compra e venda de bens e serviços pelas esferas pública e privada, com destaque na mídia para os processos de privatização de empresas estatais e venda de concessões ocorridos na última década, confirmam a popularidade deste processo de alocação de recursos.

A popularização do mecanismo de leilão deve-se, principalmente, a suas propriedades de otimalidade nos seguintes casos:

1) O vendedor tem pouca informação a respeito da valoração dos potenciais compradores: Através do processo de leilão, há a revelação parcial da valoração dos agentes, devido a concorrência entre os mesmos (seja de forma dinâmica, por meio de leilões ascendentes, seja de forma estática, por meio de leilões de envelope fechado).

2) O vendedor tem baixo poder de barganha: Ao estabelecer as regras da venda antes do início do leilão, o vendedor compromete-se com o cumprimento do contrato de forma crível, de modo que os agentes não acreditam que haverá uma quebra do procedimento ao término do leilão[1]. Com isso, os participantes sabem que as informações contidas em suas ofertas não serão usadas contra eles. Assim, a concorrência leva a revelação parcial da valoração dos agentes, possibilitando o aumento do ganho do vendedor.

No entanto, a criação de um conluio entre os participantes eliminaria todo o possível ganho que o leiloeiro teria com a concorrência entre os jogadores. Dado que o leiloeiro comprometeu-se em vender o bem segundo as regras delimitadas, a formação de cartel entre os agentes leva a minimização dos ganhos do vendedor, sendo as perdas do mesmo limitadas apenas pelo preço mínimo estabelecido.

Quanto a suceptibilidade dos desenhos de leilão a conluio, a literatura mostra que o leilão ascendente é mais propenso a formação de conluio: Milgrom (1987) apresenta um exemplo simples que explora a existência de múltiplos equilíbrios de Nash dos leilões ascendentes para construir equilíbrios perfeitos colusivos em leilões repetidos. Robinson (1985) mostra que, mesmo em leilões estáticos, estratégias de cartel têm compatibilidade de incentivos em leilões do tipo inglês. o que não ocorre em leilões de primeiro preço.

No entanto, deve-se ter em mente que os leilões fechados de primeiro preço, num contexto de jogos repetidos, também possibilitam a formação de conluios, desde que haja uma possibilidade positiva suficientemente grande de um novo leilão. Trataremos agora a literatura a respeito deste tema, considerando o caso de cartéis que incluem todos os participantes do leilão. Nos modelos apresentados, temos que todos os jogadores são neutros ao risco.

A presença de conluio em leilões de primeiro preço, valores privados e independentes foi estudada primeiramente por McAfee & McMillan (1992), que apresentam um modelo estático de conluio, ou seja, esquema em que a regra de conluio mantém-se fixa durante toda a fase de

[1] Por exemplo, que o leiloeiro irá se recusar a vender o bem ao vencedor do leilão pelo preço acordado e começará a barganhar com este

cooperação. Neste modelo, a possibilidade de punição não é modelada, considerando apenas que esta é baseada na observação da identidade do vencedor e em seu lance, informações estas que são consideradas públicas no modelo. Os autores argumentam que a punição deve se dar via jogos repetidos[2].

Na escolha do mecanismo de conluio, dada a multiplicidade de equilíbrios que surge devido a necessidade de um esquema de punição por meio de jogos repetidos, tomam por regra de seleção a maximização do lucro conjunto *ex ante* dos participantes do cartel. Além disso, para avaliar os resultados dos diferentes métodos de conluio, introduzem a questão de eficiência do cartel.

Um cartel seria eficiente se designasse como vencedor do leilão o jogador com a maior valoração, desde que esta fosse maior que o preço de reserva. Obviamente, a eficiência implicaria num lucro conjunto maior, de modo que um cartel maximizador de lucros preferiria obter um resultado eficiente, desde que este tivesse compatibilidade de incentivos.

Quanto aos mecanismos a disposição do conluio, há a possibilidade da formação de cartéis em dois ambientes:

- Cartel Fraco: Não há a possibilidade de fazer pagamentos entre os participantes;
- Cartel Forte: O cartel tem a possibilidade de fazer pagamentos entre os participantes.

Vejamos agora os mecanismos ótimos de conluio em cada um dos casos, considerando que o leiloeiro tem uma postura passiva no leilão, simplesmente anunciando um preço de reserva e vendendo o bem ao participante que fizer a maior oferta. No caso de empate, o leiloeiro sorteia uniformemente o bem entre os jogadores que fizeram as maiores ofertas.

No caso de cartéis fracos, o mecanismo que maximizaria a receita *ex ante* conjunta do cartel, entre todos os possíveis mecanismos - com ou sem correlação entre os lances - seria àquele no qual todo jogador que tivesse valoração acima do preço de reserva faria uma oferta igual a este, deixando que o leiloeiro sorteie o vencedor. Obviamente, esta regra não gerará um resultado eficiente. No entanto, os autores mostram que não há como obter uma regra de conluio eficiente para o caso de cartéis fracos.

No caso de cartéis fortes, o mecanismo ótimo pediria que cada jogador reportasse para o cartel sua valoração. O jogador com a maior valoração seria designado vencedor do leilão, pagando ao leiloeiro o preço de reserva e fazendo transferências em dinheiro para os demais jogadores num montante total igual a diferença entre o valor esperado da segunda maior valoração e o preço de reserva. Obviamente, este mecanismo é equivalente a realização de um pré-leilão de primeiro preço entre os participantes do conluio antes do leilão oficial. Observe também que neste caso o cartel seria eficiente.

A partir deste resultado básico, os autores tratam da questão do comportamento do leiloeiro, avaliando o impacto de mudanças no preço de reserva, bem como do anúncio ou não do preço de reserva sobre o resultado do leilão.

[2]Este tipo de abordagem é conhecida como *side contract theory.*

Com relação ao preço de reserva, como o preço de reserva ótimo no caso de conluio é maior que o preço de reserva de concorrência, a detecção de conluio dos participantes levaria a uma elevação do preço de reserva praticado pelo leiloeiro como uma forma de mitigar os efeitos do cartel. Segundo McAfee & McMillan, quando há um pequeno número de participantes no leilão, os ganhos do conluio em um ambiente no qual o preço de reserva foi elevado serão menores que os ganhos conjuntos num ambiente de concorrência com preço de reserva baixo. Com isso, se a taxa de desconto for suficientemente baixa, um leilão com poucos participantes não geraria incentivos a conluio, pois os ganhos no curto prazo serão menores que as perdas no futuro, quando o leiloeiro elevar o preço de reserva para combater o conluio. Este resultado é apresentado para o caso em que as valorações dos jogadores são retiradas de uma distribuição $U[0,1]$.

No que tange ao anúncio do preço de reserva, os autores afirmam que sua validade como instrumento de combate ao conluio dependeria do conhecimento ou não da valoração do vendedor por parte dos participantes do leilão. No caso em que esta é conhecida, não há nenhum efeito deste instrumento, enquanto no caso em que esta valoração não é de conhecimento comum, este medida levaria a necessidade de comunicação entre os jogadores, o que aumentaria a possibilidade de identificação de um comportamento de conluio.

A principal crítica a este modelo é não modelar a punição via jogos repetidos.

Um modelo que pretende internalizar a questão da punição é apresentado por Johnson & Robert (1999). Este modelo apresenta um modelo de conluio fraco estático em leilões de primeiro preço, valores privados e independentes, repetidos infinitamente, em que cada jogador conhece sua valoração antes da realização de cada leilão. A partir deste ambiente, os autores criam um modelo de conluio calcado na metodologia Abreu & Pearce & Stacchetti e na idéia apresentada por Green & Porter de que há a possibilidade de choques estocásticos, no caso, da possibilidade de haver um jogador com uma valoração suficientemente alta para aceitar qualquer punição futura. Este comportamento não é levado em consideração pelo esquema de ofertas iguais apresentado por McAfee & McMillan (1992), sendo, segundo Johnson & Robert, uma característica intrínseca da modelagem de jogos repetidos. Assim, a regra de ofertas no modelo de Johnson & Robert internaliza a possibilidade de desvio dos jogadores no caso em que estes possuem valorações muito altas, permitindo que desviem e sejam punidos por determinado número de rodadas. Com isso, o esquema ótimo de ofertas passa a ter um formato de escada, com trechos de conluio e outros de concorrência nas ofertas.

Com relação aos instrumentos a disposição do leiloeiro, Johnson & Robert mostram que o comportamento do preço de reserva passa a ser ambíguo, enquanto introduzem como possíveis instrumentos a disposição do leiloeiro a utilização de tetos para as possíveis ofertas e a utilização de regras de desempate que indicassem o vencedor *ex ante*. No caso do teto para as ofertas, haveria um estímulo à quebra do conluio ao elevar os ganhos dos jogadores no caso de concorrência, enquanto a regra *ex ante* dificultaria o esquema de conluio, elevando a taxa de paciência mínima necessária para manter o conluio .

No entanto, a possibilidade de desvio de jogadores com maior valoração é reduzida ao introduzirmos mecanismos que possibilitam que o jogador com maior valoração vença o leilão, resgatando a eficiência do esquema de conluio, ao mesmo tempo que evitamos problemas de compatibilidade de incentivos. Uma forma de obtermos isto é tratarmos um esquema de conluio dinâmico, no qual a regra de conluio depende da história passada. Um exemplo desta literatura é dado por Skrzypacz & Hopenhayn (1999) que apresentam um modelo no qual o vencedor do leilão de uma rodada tem um payoff de continuação menor. No fundo, este mecanismo tenta imitar, por meio de transferências de payoff esperado futuro, os pagamentos laterais apresentados pelo esquema de conluio forte, de modo a resgatar a eficiência, o que é obtido em termos assintóticos para cartéis com um grande número de participantes.

No entanto, nos modelos de Johnson & Robert (1999) e Skrzypacz & Hopenhayn (1999) os pagamentos feitos ao leiloeiro podem ser superiores ao preço de reserva. Aoyagi (2002) retoma o pagamento mínimo, por um mecanismo de rotação de ofertas num modelo de dois potenciais compradores no qual há um esquema de conluio dinâmico com a introdução de um mecanismo de comunicação[3] em que cada jogador revela sua valoração para o mecanismo central de conluio, o qual seleciona o jogador de maior valoração , de modo que este vence o leilão pagando o preço de reserva. Para evitar questões de compatibilidade de incentivo, quanto maior a valoração reportada, maior a probabilidade de iniciar-se uma fase de punição de m períodos, nos quais o jogador que está sendo punido só ganha o leilão se o outro jogador tiver a valoração abaixo do preço de reserva. Obviamente, este esquema gera ineficiência, embora gere ganhos comparado ao esquema de conluio estático tácito apresentado por McAfee & McMillan (1992).

No que se refere a mecanismos de comunicação em conluio em leilões de 1o. preço, o trabalho de Pesendorfer (2000) apresenta um modelo em que os agentes enviam mensagens a respeito de sua ordenação de preferências. Ao aumentar o número de bens na ordenação, mostra que este esquema de conluio leva a um resultado de eficiência assintótica. A grande crítica a este modelo, similarmente ao caso de McAfee & McMillan, é não modelar o jogo repetido para tratar a questão da punição no caso de desvio da regra de conluio.

O modelo que iremos apresentar, próximo ao modelo sugerido por Pesendorfer (2000), internaliza num modelo de rotação de ofertas estático, além da questão de jogos repetidos, a possibilidade de comunicação descentralizada e sem custo, entre os participantes do conluio. Ao introduzirmos esta nova estrutura, percebemos, além da elevação dos ganhos conjuntos frente aos obtidos por um conluio estático tácito do tipo McAfee & McMillan (1992), que os resultados de superioridade do esquema dinâmico de Aoyagi (2002) não se mantém necessariamente. Ao internalizarmos a questão da punição por meio de jogos repetidos no modelo, vislumbramos a possibilidade de um *trade off* entre o lucro do conluio e o incentivo a desvio, pois o aumento do sistema de comunicação pode levar a um aumento do lucro esperado do conluio ao mesmo tempo que exige uma taxa de paciência maior para a manutenção do mesmo.

Por fim, confirmamos a ambiguidade do preço de reserva como mecanismo de quebra de conluio, bem como avaliamos a questão de mudanças na regra de desempate.

A seção 2 introduz o modelo básico de conluio, apresentando os resultados de superioridade dos ganhos frente a McAfee & McMillan (1992) e de ambiguidade entre os ganhos do esquema estático com comunicação apresentado e o esquema dinâmico proposto por Aoyagi (2002).

A seção 3 avalia os mecanismos a disposição do leiloeiro, evidenciando a questão do preço de reserva como instrumento quebra de conluio, bem como tratamos a questão de mudança na regra de desempate.

Por fim, a seção 4 conclui o trabalho.

[3]Este mecanismo assemelha-se ao proposto por equilíbrios correlacionados.

2 Modelo

Nesta seção, apresentaremos um modelo de conluio em um ambiente de leilões de primeiro preço repetidos em que os jogadores podem enviar mensagens entre si. Estes sinais terão informação a respeito da ordenação de preferências do agente e sobre o interesse do jogador em participar ou não do leilão.

A partir disto, veremos qual seria o impacto de variações na função de distribuição $F(.)$ no incentivo dos jogadores permanecerem em conluio, bem como mostraremos que o envio de mensagens entre os jogadores gera ganhos de receita frente a um mecanismo de rotação de ofertas puro, como apresentado por McAfee & McMillan (1992)

Evidenciaremos que o mecanismo de rotação de ofertas dinâmico proposto por Aoyagi (2002) não necessariamente gera uma receita esperada maior. Além disso, veremos que apesar do resultado de eficiência assintótica através do aumento dos bens ordenados pelo sistema de comunicação apresentado por Pesendorfer (2000) , temos que este mesmo processo levaria a uma elevação da taxa de paciência necessária para sustentar o esquema de conluio.

Por fim trataremos da questão do princípio do desvio para o caso em que as valorações são extraídas de uma distribuição $U[0,1]$.

2.1 Hipóteses

Consideraremos um modelo simples com n potenciais compradores neutros ao risco, idênticos no sentido *ex ante*, com valoração privada θ, onde θ é uma v.a. com função distribuição contínua $F(.)$ que é comum a ambos agentes. $F(.)$ tem densidade estritamente positiva e continuamente diferenciável $f(.)$, definida sobre um suporte $[0,1]$. F e f são de conhecimento comum.

Não há custo em fazer ofertas e o preço de reserva do leiloeiro é $b_0 \geq 0$, constante e conhecido por ambos os participantes.

2.1.1 Estrutura do Jogo

Vamos considerar o caso de um jogo finito cuja probabilidade de uma nova rodada é sempre positiva (logo temos $0 < \delta < 1$).

No entanto, o superjogo está dividido em estágios, sendo que cada estágio possui m períodos, ou seja, m leilões.

No início de cada estágio, antes da realização do primeiro leilão, os jogadores conhecem suas valorações para os leilões do jogo estágio e enviam um sinal sobre suas valorações para o outro jogador, recebendo o sinal deste simultaneamente. Com base em sua valoração e no sinal recebido, cada participante escolhe seu lance para o primeiro leilão. Ao final do primeiro período, os jogadores sabem o vencedor do leilão e o valor pago.

No segundo período, o jogador decide seu lance com base na sua valoração, no sinal recebido do outro jogador e na oferta vencedora do primeiro leilão, e assim por diante.

2.1.2 Estratégia de Conluio

A partir desta estrutura do jogo estágio, vamos considerar a seguinte estratégia de conluio:

1^o) Fase de comunicação: Primeiramente, devemos destacar que estamos avaliando um jogo com um mecanismo de comunicação sem custo (*cheap talk*), o qual, a princípio, geraria múltiplos equilíbrios. No entanto, vamos modelar um sistema de comunicação que, além de intuitivo, gerará implicações para determinados resultados da literatura. Ao fazer isto, vamos impor a hipótese de "linguagem rica" ("*rich-language assumption*"), na qual assume-se que os jogadores não são mal-entendidos de forma gratuita.

A princípio, observemos que um sistema de conluio estático sem pagamentos laterais, no qual a regra de alocação baseia-se na valoração reportada pelos jogadores, não é implementável. Isto porque a revelação da verdadeira valoração por parte dos jogadores não é uma sinalização crível, pois, sempre que o valor do bem for maior que o preço de reserva, será interessante para o jogador sinalizar que sua valoração é a maior possível.

Assim, apresentemos um mecanismo de sinalização que se mostrará crível e possibilitará ganhos de coordenação entre os jogadores.

Cada jogador envia duas mensagens para o oponente:

- Sua ordenação de preferências dos próximos bens que serão (possivelmente) leiloados.

Esta ordenação é dada pela seguinte função: $pos\left(\theta_i^k\right) : [0,1]^m \rightarrow \{1,,...,m\}$, que indica a posição do bem k na ordenação do jogador i dentre os bens leiloados no estágio. Quanto menor a ordenação, mais preferido é o bem.

Note que, diferentemente do caso da valoração, a possibilidade de empate nas ordenações é significativa. Considere, por exemplo, o caso de dois bens a serem leiloados: k e $k-(-1)^k$, pois temos que comparar o bem vendido no período ímpar com o bem vendido no período par subsequente. Neste caso, temos como possíveis empates:

a) $pos\left(\theta_i^k\right) = pos\left(\theta_{-i}^k\right) = 1$ e $pos\left(\theta_i^{k-(-1)^k}\right) = pos\left(\theta_{-i}^{k-(-1)^k}\right) = 2$ ou;

b) $pos\left(\theta_i^{k-(-1)^k}\right) = pos\left(\theta_{-i}^{k-(-1)^k}\right) = 1$ e $pos\left(\theta_i^k\right) = pos\left(\theta_{-i}^k\right) = 2$.

onde θ_i^k é a valoração do agente i pelo bem k.

- Um sinal que indica se sua valoração está acima ou abaixo do preço de reserva estabelecido pelo leiloeiro.

2^o) Fase de leilão: Os jogadores fazem seus lances de acordo com a seguinte estratégia:

a) Considere o leilão do bem k. Suponhamos que pelo menos dois jogadores têm valoração acima de b_0[4]. Se $pos\left(\theta_i^k\right) < pos\left(\theta_{-i}^k\right)$, $\forall -i$, o jogador i deve dar um lance de $b = b_0$,

[4] Caso só um deles tenha valoração acima de b_0, não importando a ordenação enviada, o jogador que tiver a maior valoração irá dar um lance igual a b_0 e vencerá o leilão.

enquanto seus oponentes deve dar um lance $\overline{b} < b_0$. Se $pos\ (\theta_i^k)\ =\ pos\ (\theta_j^k)\ < pos\left(\theta_{-i,\,j}^k\right)$, ambos os jogadores fazem ofertas de $b = b_0$ e deixam que o leiloeiro escolha o vencedor, enquanto os demais jogadores fazem ofertas de $\overline{b} < b_0$, e assim sucessivamente;

b) Se houver desvio por parte de algum dos jogadores, todos devem passar a fase de concorrência deste período em diante.

Vejamos agora que esta estratégia tem um sistema de comunicação revelador da verdade e produz ganhos sobre o equilíbrio competitivo. Primeiramente, vejamos a questão a respeito do sistema de comunicação.

Com relação a mensagens sobre a valoração estar acima ou abaixo do preço de reserva, não há incentivo a mentir, pois a princípio não alterará o comportamento dos oponentes no caso em que a valoração do agente for maior que b_0, enquanto no caso em que a valoração for menor que b_0, o agente não terá nenhum benefício em mentir. Analisemos agora a questão de ordenações falsas. Primeiramente, observemos o caso em que temos dois jogadores e dois bens

Proposição 2.1*: No caso de dois jogadores e dois períodos no jogo estágio, não é ótimo para o jogador i enviar ordenações falsas para o outro participante do conluio.*

Prova*: Considere que o jogador i tem a seguinte ordenação:* $pos\left(\theta_i^k\right) < pos\left(\theta_i^{k-(-1)^k}\right)$*. Se ele enviar ao seu oponente uma ordenação na qual* $pos\left(\theta_i^{k-(-1)^k}\right) < pos\left(\theta_i^k\right)$*, temos que ele reduz a possibilidade de ganhar o bem k - pois se o jogador* $-i$ *ordenar* $pos\left(\theta_{-i}^k\right) < pos\left(\theta_{-i}^{k-(-1)^k}\right)$*, pelas regras do conluio o jogador* $-i$ *deve vencer o leilão do bem k, e aumenta a probabilidade de ganhar o bem* $k - (-1)^k$*, que não lhe é tão desejado. Dada a simetria em termos ex ante dos jogadores, estas variações devem ter a mesma probabilidade, gerando uma perda em termos do retorno esperado.* ¥

Pesendorfer mostra que neste caso o equilíbrio do jogo de comunicação é único. No caso de mais de dois jogadores e/ou mais de 2 períodos no jogo estágio, podemos ter multiplicidade de equilíbrios. No entanto, consideraremos sempre o caso do equilíbrio em que todos os jogadores dizem a verdade.

Passemos agora a questão dos ganhos com o conluio, de modo a mostrar que este é um equilíbrio. Primeiramente, vamos considerar o lucro esperado por parte do jogador i na estratégia de conluio. Note que, além de ganhar o bem sempre que a valoração dos oponentes for menor que b_0, enquanto a sua é maior que b_0, o jogador i possui as seguintes possibilidades de vitória do leilão do bem k:

1) A posição da valoração do bem k para o agente i é menor que a posição da valoração dos demais agentes e sua valoração é maior que b_0: o agente i irá ganhar o leilão pagando o preço de reserva e seu ganho esperado será $E\left[\theta_i^k\ -\ b_0\right]$;

2) A posição da valoração do bem k para o agente i é igual a posição da valoração de algum(ns) outro(s) agente(s) - sendo menor que a posição dos demais - e sua valoração é maior

que b_0: o agente i irá ganhar o leilão com probabilidade $\frac{1}{j}$, onde j é o número de agentes que empataram com i na ordenação do bem k, sendo seu ganho esperado de $\frac{1}{j}\ E\left[\theta_i^k\ -\ b_0\right]$.

Para o caso de dois jogadores e dois bens a expressão fica:

$$\left[\frac{1+2F\left(b_0\right)\ +F\left(b_0\right)^2}{4}\right]\int_{b_0}^{1}\left(\boldsymbol{\theta}-b_0\right)f\left(\boldsymbol{\theta}\right)d\theta\ +\frac{1-F\left(b_0\right)}{2}\int_{b_0}^{1}\left(\boldsymbol{\theta}-b_0\right)F\left(\boldsymbol{\theta}\right)f\left(\boldsymbol{\theta}\right)d\theta.$$

Por simplificidade, consideremos o caso em que $b_0 = 0$. Com isso, temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\left\{\frac{1}{2}E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\ +\frac{1}{4}E\left(\theta\right)\right\}. \tag{1}$$

A partir da expressão (1), vejamos as condições para as quais o ganho da estratégia de conluio é maior que o de concorrência entre os jogadores. Para que o ganho *ex ante* de conluio seja maior devemos ter:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\left\{\frac{1}{2}E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\ +\frac{1}{4}E\left(\theta\right)\right\}\geq\sum_{k\,=\,0}^{\infty}\delta^k E_\theta\left[\int_0^\theta F(X)dX\right]. \tag{2}$$

Fazendo os devidos cálculos (vide apêndice), obtemos a seguinte expressão:

$$E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\leq\frac{5}{6}E\left(\theta\right). \tag{3}$$

Este resultado indica que, para que haja conluio, a distribuição não pode estar concentrada próxima do 0. A intuição disto vem do fato que, quando as valorações são muito baixas e estão muito próximas umas das outras, os ganhos do conluio em reduzir o preço pago pelo vencedor são minimizados, pois o valor esperado da segunda maior valoração, que é o valor pago pelo vencedor no caso de concorrência, será muito próximo de zero. Por outro lado, a perda de eficiência do conluio se mantém, devido ao fato do jogador ter a possibilidade de perder o bem no caso que tiver a maior valoração (por exemplo, no caso em que há empate nas ordenações), enquanto a concorrência entre os jogadores gera um resultado eficiente, o qual, conseqüentemente, gera uma maior receita. Como a probabilidade *ex ante* de ganhar um bem é igual a $\frac{1}{2}$ em qualquer um dos casos, a concorrência entre os jogadores passa a ser preferível, pois gera uma receita esperada maior.

No entanto, este não é o único problema a ser solucionado em um cartel. Além de ser interessante ao jogador entrar no cartel, é preciso que não existam incentivos para que ele rompa com o acordo estabelecido entre seus membros. Portanto, devemos mostrar que a estratégia de conluio é um equilíbrio perfeito em subjogos do superjogo. Para tanto, segundo Fudenberg & Tirole (1991)[5], isto pode ser garantido se comprovarmos que não será interessante para nenhum jogador desviar em um estágio arbitrário do jogo (conhecido como *Princípio de um desvio)*. Portanto, consideremos o caso do jogador com maior incentivo a desvio no jogo estágio, ou seja, o jogador que perde o leilão do primeiro período e ganha o leilão do segundo período. Neste caso, o princípio de um desvio fica:

$$
\begin{aligned}
&0 + \delta(\theta_i^1) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{1-\delta}\left[E\left(\theta F(\theta)\right) + \frac{1}{2}E(\theta)\right] \geq \\
&(\theta_i^0 - \varepsilon) + \frac{\delta}{1-\delta}\left[\int_0^1 F(\theta)d\theta - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right]. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Como ε pode ser arbitrariamente pequeno, tomaremos $\varepsilon \to 0$, de modo que omitiremos este parâmetro. Considere, a princípio, que $\delta(\theta_i^1) = \theta_i^0$ (ou seja, considere que o jogador tem o mesmo ganho esperando e vencendo o leilão de amanhã ou desviando hoje). Com isso, temos:

$$
\frac{\delta^2}{1-\delta}\left[\frac{1}{4}\left(1 + E[\theta] - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right)\right] \geq \frac{\delta}{1-\delta}\left(1 - E[\theta] - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right). \qquad (5)
$$

ou ainda,

$$
\delta \geq \frac{4\left(1 - E[\theta] - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right)}{\left(1 - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta + E(\theta)\right)}. \qquad (6)
$$

Vamos definir $\bar{\delta}$ como o valor mínimo de δ que consegue sustentar o conluio. Temos então o seguinte resultado:

Proposição 2.3: *Se $F_1(\theta)$ domina estocasticamente em 2ª ordem $F_2(\theta)$, temos que $\overline{\delta}_1 \leq \overline{\delta}_2$.*

Prova: *Apêndice.*

O resultado acima dá uma intuição a respeito de como se comporta o incentivo a desvio à medida que alteramos a variância da distribuição. Ou seja, quanto menor a variância (menor a incerteza com respeito a minha valoração quanto aos bens a serem leiloados no futuro, bem como a valoração dos demais jogadores), mais fácil a manutenção do conluio.

A simplificação utilizada de $\delta(\theta_i^1) = \theta_i^0$ não é fundamental para o resultado acima. Isto é evidenciado pelo seguinte resultado.

Seja $\theta_i^0 = \delta\left(\theta_i^1\right) + \Delta\theta$. Com isso, temos:

[5] Teorema 4.2, pag.110

Lema 2.4: a) $\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial E(\theta)} \leq 0$, *se* $0 < \delta < 1$ *e* $\Delta\theta \geq 0$.

Definindo $u = \int_0^{\bar{\theta}} F(\theta)^2 \, d\theta$, temos:

b) $\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial u} \leq 0$, *se* $0 < \delta < 1$ *e* $\Delta\theta \geq 0$.

Prova: Apêndice.

Vamos agora verificar que a introdução do sistema de comunicação gera ganhos sobre o mecanismo de lances apresentado por McAfee & McMillan (1992).

Proposição 2.5: *No caso de dois jogadores e dois bens, a introdução de um mecanismo de comunicação do tipo ordenação associado a rotação de lances leva a ganhos de receita sobre um mecanismo no qual todos os jogadores apresentam lances idênticos* [6].

Prova: Apêndice.

Passemos agora a ambiguidade dos resultados apresentados por Aoyagi(2002). Para tanto, vamos fazer algumas definições seguindo o esquema proposto por este autor.

A princípio, considere o caso de um esquema de conluio eficiente, ignorando as questões de compatibilidade de incentivo. Neste caso, o lucro esperado por contrato, para o caso de dois jogadores, será:

$$g^* = \int_{b_0}^{1} (\theta - b_0) F(\theta) f(\theta) \, d\theta$$

Agora, vamos definir $\bar{g}$ como o ganho do jogador que sempre ganha o conluio quando sua valoração é maior que b_0, ou seja:

$$\bar{g} = \frac{1}{1 - F(b_0)} \int_{b_0}^{1} (\theta - b_0) f(\theta) \, d\theta$$

Por fim, seja $\underline{g}$ o ganho do jogador que ganha apenas quando seu oponente tem valoração abaixo do preço de reserva:

$$\underline{g} = \frac{F(b_0)}{1 - F(b_0)} \int_{b_0}^{1} (\theta - b_0) f(\theta) \, d\theta$$

[6] Pode-se também falar em ganhos de bem-estar social, pois o leiloeiro obtém a mesma receita, enquanto os participantes obtém ganhos.

Dado que o lucro conjunto ótimo seria dado por $2g^*$, Aoyagi(2002) mostra que:

$$2g^* > \bar{g} \; + \; \underline{g}$$

Proposição 2.6: *Não podemos afirmar que o esquema de rotação de lances dinâmico proposto por Aoyagi (2002) é superior ao esquema de rotação de lances estático com comunicação sem custo que apresentamos:*

Prova: Apêndice.

Uma boa forma de mostrar isto é apresentar um exemplo em que o esquema de conluio que apresentamos pode ser superior ao de Aoyagi(2002). Consideremos então o caso em que $m = 4$ e $n = 2$ e $b_0 = 0$. Com isso, temos que:

$$\frac{Lucro\ por\ contrato}{g^*} = 0,9375$$

Enquanto no caso de Aoyagi, temos:

$$\frac{Aoyagi}{g^*} = 0,8860$$

Vamos agora a questão referente ao *trade off* eficiência assintótica do aumento do sistema de comunicação ($m \to \infty$) frente a elevação da taxa de paciência necessária para sustentar o conluio.

Pelo trabalho de Pesendorfer (2000) sabemos que, para $b_0 = 0, m \to \infty \implies retorno \to g^*$. Com isso, temos a princípio um resultado de eficiência assintótica.

Contudo, este resultado nada diz a respeito do incentivo a desvio dos jogadores. Ao avaliarmos o princípio de desvio, consideremos o caso de dois jogadores em que um dos agentes tem a ordenação igual ao descolamento da ordenação do oponente, ou seja, o caso em que um jogador tem uma distribuição dada por $(a, b, c, d..., m)$ e seu oponete tem uma ordenação de $(b, c, d, ..., m, a)$ onde a é o bem vendido no quarto período e b é vendido no primeiro período. O jogador com ordenação $(a, b, c, d..., m)$ não irá desviar se:

$$\delta^{m-1}(a) + \frac{\delta^m}{1-\delta}\left[\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{m}\left[\begin{array}{c}\left[1-\frac{(i-1)}{m}\right]^2 \\ -\left[1-\left(\frac{i}{m}\right)\right]^2\end{array}\right] \times \\ \int_0^1 \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!}\theta F(\theta)^{m-i}\left[1-F(\theta)\right]^{i-1} f(\theta)\, d\theta \end{array}\right\}\right]$$
$$\geq b + \frac{\delta}{1-\delta}\left[\int_0^1 F(\theta)d\theta - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right]$$

Como quando $m \to \infty$ o termo entre colchetes do lado direito tende a $g^* < \infty$ e $\delta^m \to 0$, temos que o lado direito da expressão vai a zero, de modo que há necessariamente o desvio. Logo, a eficiência assintótica é acompanhada de um aumento do incentivo a desvio.

Para exemplificarmos esta questão, passemos ao caso em que as valorações tem distribuição $U[0,1]$.

2.2 Caso da distribuição Uniforme

Inicialmente, consideremos o caso em que $m = 2$ e $n = 2$. Resolvendo para o caso em que os $\theta' s$ têm distribuição $U[0\ ,1]$ obtemos a seguinte expressão para o lucro esperado[7]:

$$\frac{1}{1-\delta}\left\{\frac{7-10b_0+2b_0^3+b_0^4}{24}\right\}.$$

Vamos tratar da questão do incentivo a desvio dos jogadores. No caso do jogador que perde o leilão em $t = 0$, temos que não haverá incentivo a desvio se:

$$\begin{aligned} & 0 + \delta(\theta_i^1 - b_0) + \frac{\delta^2}{1-\delta}\left\{\frac{7-10b_0+2b_0^3+b_0^4}{24}\right\} \\ \geq \ & \left[\theta_i^0 - b_0\right] + \frac{\delta}{1-\delta}\left\{\frac{2b_0^3 - 3b_0^2 + 1}{6}\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Para avaliar de forma mais palatável a questão do incentivo a desvio, consideraremos que o preço de reserva é $b_0 = 0$. Com isso, para um jogador com a maior *pos* (θ^0), temos que:

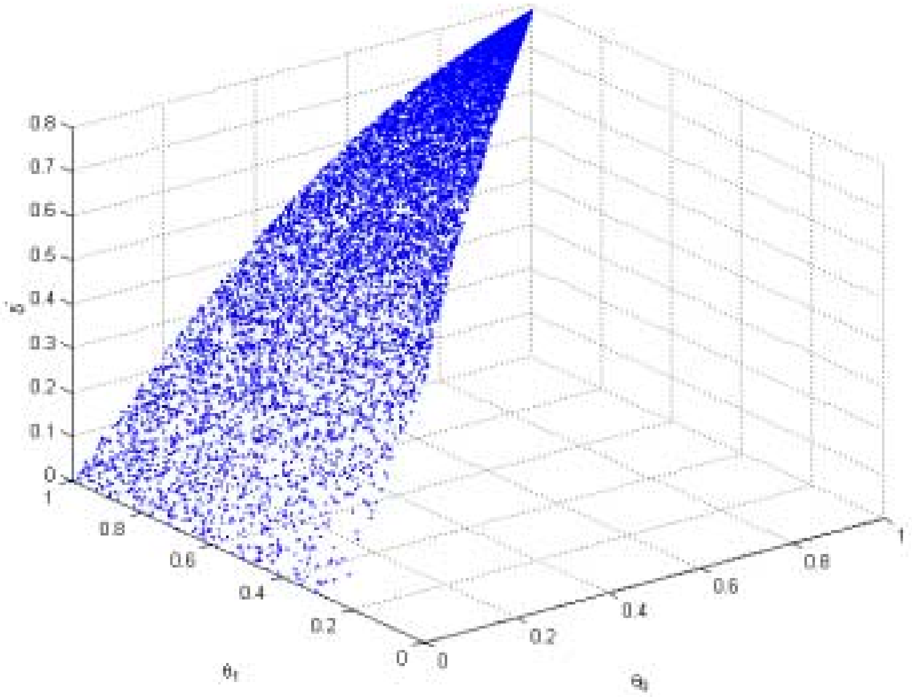
$$0 + \delta\theta_i^1 + \frac{\delta^2}{1-\delta}\left(\frac{7}{24}\right) \geq \theta_i^0 + \frac{\delta}{6(1-\delta)}.$$

Sabemos que $\theta_i^1 > \theta_i^0$, pois o agente elencou dessa forma e esta ordenação é crível. No entanto, não temos como afirmar nada a respeito de $\delta(\theta_i^1)$ e θ_i^0, pois não conhecemos δ, sabendo apenas que $\delta \in (0,\ 1)$. Mas, a título de obtermos o resultado mais forte, tomemos $\delta(\theta_i^1) = 0$ e $\theta_i^0 = 1$, o que seria impossível - dadas hipóteses, mas nos daria um supremo nas restrições sobre o δ. Neste caso, teríamos $\bar{\delta} \approx 0,91$.

.

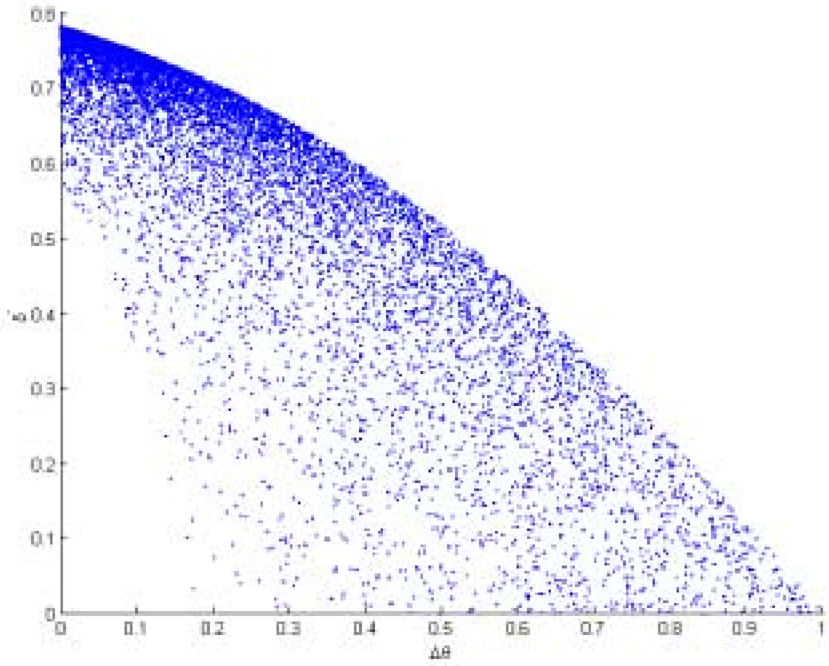
Por fim, para termos uma visão de como a variação de θ_i^1 e θ_i^0 afeta $\bar{\delta}$, temos o seguinte gráfico, calculado para 10000 valores de θ_i^0 e θ_i^1:

[7] Parte dos cálculos estão no apêndice



O formato do gráfico deve-se, principalmente ao fato de que $\theta_i^1 \geq \theta_i^0$, de modo que o gráfico acumula-se próximo aos valores mais altos de θ_i^1, enquanto se afasta dos valores mais altos de θ_i^0 (dado que, para $\theta_i^0 = 1$, necessariamente $\theta_i^1 = 1$).

Considerando $\Delta\theta = \theta_i^1 - \theta_i^0$, temos:



Este resultado mostra que a introdução das valorações dos bens dos leilões do jogo estágio alteram o valor do δ mínimo necessário para o estabelecimento do conluio, mas não eliminam a possibilidade do mesmo. Como era de se esperar, quanto menor $\Delta\theta$ (maior o ganho possível no desvio), maior o $\bar{\delta}$ necessário.

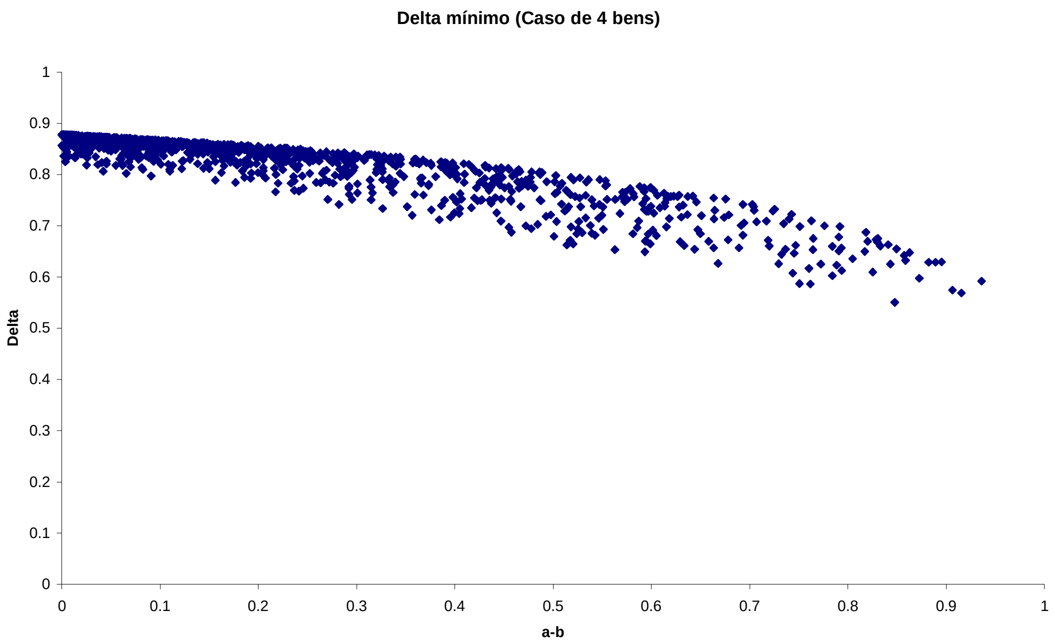
Passemos agora o caso em que temos $m = 4$ e $n = 2$ e $b_0 = 0$. Neste caso o lucro esperado fica:

$$\frac{1}{8}\left\{6E\left(\theta F\left(\theta\right)\right) + E\left(\theta\right)\right\}$$

Para o caso uniforme, observamos que este lucro é superior ao caso anterior. Passemos agora para a questão do desvio. Considerando mesmo caso apresentado anteriormente, no qual temos os agentes com as seguintes ordenações: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{bmatrix}$, onde a é o bem vendido no quarto período e b é vendido no primeiro período. Com isso, o princípio de desvio fica:

$$\delta^4\left(15 - 48a\right) + \delta^3 48a + \delta\left(48b - 8\right) - 48b \geq 0$$

Graficamente, obtemos o seguinte resultado:



Obviamente, observamos uma elevação do valor mínimo necessário para a sustentação do conluio em qualquer nível de diferença entre os valores das condições iniciais.

Passemos agora a questão do comportamento do leiloeiro para avaliarmos como este pode quebrar o conluio entre os participantes.

3 Comportamento do leiloeiro

Vejamos agora como o leiloeiro pode atuar no sentido de reduzir a possibilidade de conluio. A princípio, podemos destacar os seguintes instrumentos: aumento do número de jogadores, rigidez no cronograma, preço de reserva, mudança na regra de desempate.

3.1 Aumento do número de jogadores

Como poderíamos esperar o aumento do número de jogadores leva a redução do lucro dos participantes do conluio. Tomando $b_0 = 0$ e $m = 2$, sabemos que o lucro de um participante do conluio é dado por:

$$\frac{1}{n}\left[2\left(1-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}E\left(\theta\right)\right]$$

Obviamente, quando $n \to \infty$, a expressão acima vai a zero, de modo que o lucro de permanecer em conluio vai a zero. Assim, o leiloeiro conseguiria extrair todos os ganhos dos jogadores, estando estes cartelizados ou não.

3.2 Rigidez no cronograma

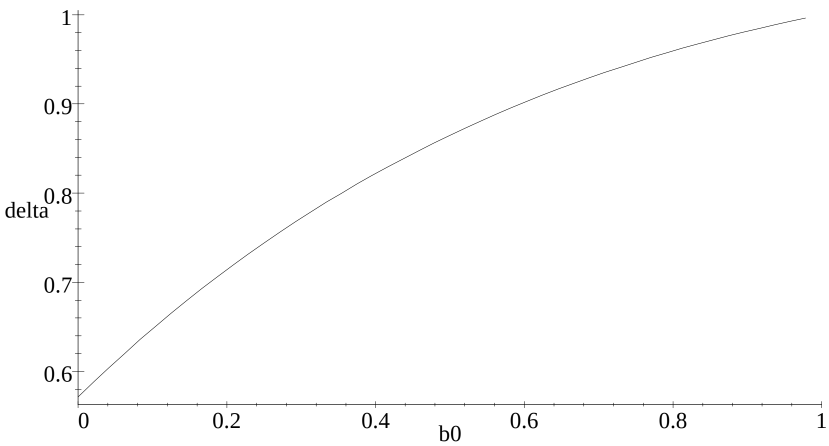
Esta seria uma forma eficaz de evitar um conluio, pois tornaria o superjogo finito, de modo que não existiria um sistema de punição - por indução retroativa, o único equilíbrio do jogo seria o equilíbrio estático repetido em cada estágio do jogo, ou seja, o equilíbrio competitivo. No entanto, esta possibilidade pode não estar disponível para o leiloeiro. Por exemplo, se houver outros leiloeiros e estes não tiverem como se coordenar, ressurge o problema da possibilidade dos participantes observarem uma corrente infinita de leilões e retornarem ao esquema de conluio.

3.3 Elevação do preço de reserva

Para utilizar o preço de reserva anunciado como um instrumento de política, temos que modificar o modelo de forma que o leiloeiro tenha sua valoração como uma informação privada. Assim, teríamos b^* como o valor que o leiloeiro atribui ao bem a ser vendido e b_0 como o preço de reserva anunciado. Destacamos que consideraremos o preço de reserva anunciado b_0 tendo um comprometimento crível, de modo que não há possibilidade de barganha entre os participantes do leilão que deram lances abaixo de b_0 e o leiloeiro.

Devemos ressaltar que os resultados desta subseção serão extraídos do caso em que a distribuição dos tipos é $U\left[0,1\right]$.

A princípio, uma das formas de reduzir a possibilidade de conluio seria aumentar o preço de reserva, de modo que o ganho dos participantes em permanecer no conluio se reduz, aumentando o incentivo a desvio. A partir da equação (7), calculamos o δ limite do conluio[8]. Considerando a princípio $\delta\left(\theta_i^1 - b_0\right) = \left(\theta_i^0 - b_0\right)$, obtemos os seguintes valores de $\bar{\delta}\left(b_0\right)$:



Note que o valor de $\bar{\delta}$ cresce com b_0. No entanto, a introdução das condições iniciais (θ_i^0 e θ_i^1), poderiam alterar os resultados. Os exemplos para o caso $b_0 = 0.4$ e $b_0 = 0.8$ estão no apêndice e indicam que o resultado se mantém, no entanto, por meio de processos numéricos, obtemos as seguintes derivadas:

- $\dfrac{\partial \bar{\delta}}{\partial b_0}$ ambígua
- $\dfrac{\partial \bar{\delta}}{\partial \theta_i^0} > 0;$
- $\dfrac{\partial \bar{\delta}}{\partial \theta_i^1} < 0$

Ou seja, o efeito de alterações do preço de reserva na possibilidade de conluio é ambíguo. Outro ponto a se destacar é que θ_i^0 e θ_i^1 tem impacto na possibilidade de sustentação ou não do conluio, mas são desconhecidos pelo leiloeiro, de modo que tentativas de utilizar o preço de reserva como instrumento de quebra de conluio não tem um efeito previsível.

No entanto, o preço de reserva pode ser um instrumento para maximizar a receita esperada do leiloeiro. Vamos agora abordar esta questão no caso geral.

[8] O valor de δ que satisfaz a relação com igualdade, acima do qual há conluio

3.3.1 Maximização do leiloeiro

Vejamos agora o problema de maximização do leiloeiro. Vamos supor que o valor do δ é de conhecimento comum e que o leiloeiro está comprometido em manter o mecanismo de leilão acordado. Com isso, o problema de maximização do leiloeiro é:

$$\underset{b_0}{\text{Max}} \left\{ \begin{array}{c} I(\delta < \overline{\delta}(b_0)) \left\{ b^* + 2 \int_{b_0}^{\overline{\theta}} \left(\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} - b^* \right) F(\theta) f(\theta) \, d\theta \right\} + \\ I(\delta > \overline{\delta}(b_0)) \left\{ b^* + (b_0 - \ v) \left[1 - F(b_0)^2 \right] \right\} \end{array} \right\}. \tag{8}$$

onde as funções indicadores servem para avaliar os possíveis casos em que a quebra do conluio é ou não bem sucedida e $\overline{\delta}(b_0)$ é o valor mínimo necessário de δ para a manutenção do conluio, o qual, como já vimos, depende do preço de reserva.

Com isso, a expressão de variação de receita Concorrência-Conluio, para um dado b_0, será:

$$\Delta\Pi_L = \left\{ 2 \int_{b_0}^{\overline{\theta}} \left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} - b^* \right) F(\theta) f(\theta) \, d\theta \right\} - \\ (b_0 - b^*) \left[1 - F(b_0)^2 \right].$$

Lema 3.3: $\Delta\Pi_L > 0, \ \forall \, b_0 \ \in [0, \overline{\theta}]$.
Prova: Apêndice

Lema 3.4:
a) *A valoração do leiloeiro não afeta a distância entre a receita em concorrência e a receita em conluio. Em ambos os casos, o efeito é positivo e crescente em* b_0.

b) *Aumentos em* b_0 *reduzem* $\Delta\Pi$.

Prova: Apêndice.

Logo, para um dado preço de reserva b_0, seria vantajoso implementar concorrência sempre que esta fosse possível. No entanto, os valores de b_0 que maximizam os lucros em concorrência e em conluio, como podemos ver pelos lemas 3.1 e 3.2 são distintos, sendo $b_0^{conluio} > b_0^{concorrência}$. No entanto, como o impacto do preço de reserva na quebra do conluio é ambígua, não há uma regra de decisão ótima sobre qual o valor de b_0 que o leiloeiro deve estabelecer para maximizar seus lucros.

3.4 Mudança na regra de desempate

Um mecanismo que o leiloeiro pode utilizar para tentar reduzir a possibilidade de conluio entre os participantes é alterar a forma de alocação do bem no caso de empate nas ofertas, o que até então foi feito por meio de um sorteio entre os agentes.

As possibilidades de criação de regras arbitrárias no caso de empate são infinitas e abarcam inclusive a possibilidade de criação de mecanismos híbridos de leilão, como ocorreu no caso da maioria dos leilões de privatização no Brasil, nos quais havia um novo leilão, no caso um leilão ascendente do tipo inglês, entre o vencedor do leilão de primeiro preço e os perdedores cujos lances fossem menos que X % menores que este[9].

O que vamos fazer nesta seção é mostrar que a forma de alocação dos bens entre os participantes do cartel pode ser internalizada na regra de conluio sem causar grandes problemas à sustentabilidade do cartel e possibilitando que os ganhos do conluio sejam mantidos, independentemente da regra estabelecida pelo leiloeiro. Neste trabalho, iremos tentar manter o esquema de conluio apresentado, sem considerar as possibilidades adicionais geradas pela introdução da regra de desempate[10].

Comecemos considerando o caso em que há dois potenciais compradores e dois bens a serem leiloados durante o jogo estágio. Tomemos como $q = 1, 2, 3, ...$ a numeração do estágio em vigor (lembrando que cada estágio possui dois leilões). A partir disto, alteremos marginalmente o esquema de conluio da seguinte forma:

1^o) Fase de comunicação: Cada jogador envia uma mensagem sobre sua *ordenação* de preferências dos próximos bens que serão (possivelmente) leiloados e recebe, de forma simultânea, a mensagem do outro jogador, atualizando suas crenças a respeito da ordenação deste. Além disso, o jogador que tiver valoração abaixo do preço de reserva para algum dos bens deve enviar uma mensagem indicando que não participará do leilão deste bem.

2^o)Fase de leilão: Os jogadores fazem seus lances de acordo com a seguinte estratégia:

a) Considere o leilão do bem k: Consideremos que ambos jogadores tem valoração acima de b_0. Se $pos\ (\theta_i^k) < pos\ (\theta_{-i}^k)$, o jogador i deve dar um lance de $b = b_0$, enquanto seu oponente deve dar um lance $\overline{b} < b_0$, e vice-versa. Se $pos\ (\theta_i^k) = pos\ (\theta_{-i}^k)$ e estivermos em um estágio q ímpar, o jogador i deve dar um lance $b = b_0$ e seu oponente um lance $\overline{b} < b_0$ caso o bem k for o de menor ordenação. Se o bem k tiver a maior ordenação, os papéis dos jogadores serão invertidos. No caso de q par, o raciocínio é simétrico, com a inversão dos papéis dos jogadores (i dá o lance no bem de maior ordenação, enquanto $-i$ dá o lance no bem de menor ordenação).

b) Se houver desvio por parte de algum dos jogadores, ambos devem passar a fase de concorrência deste período em diante.

[9] Este X variou de caso para caso, tomando valores entre 5 e 20%.

[10] Por exemplo, a utilização de um leilão do tipo inglês como instrumento de alocação de recursos pode gerar uma possibilidade adicional de ganhos em conluio que não iremos tratar aqui.

Observe que a expressão do lucro *ex ante* dos participantes do conluio não se altera, pois $P\left(q\ \textit{ímpar}\right) = P\left(q\ \textit{par}\right) = \frac{1}{2}$, de modo que há correspondência com o caso de randomização por parte do leiloeiro é perfeita, e os resultados que retiramos sobre condições para viabilidade do conluio continuam valendo. Com relação ao princípio de desvio, a única alteração necessária é que não mais teremos que $\theta_i^1 > \theta_i^0$, podendo ser possível o caso em que $\theta_i^1 < \theta_i^0$ [11] e ainda que $\theta_i^0 < b_0$.

Portanto, embora a endogenização do mecanismo de alocação no caso de empate leve a uma elevação do δ mínimo necessário para sustentação do conluio nos casos mais extremos, resultado este já observado por Johnson & Robert (1999)[12]. No entanto, ela não compromete a viabilidade do próprio conluio na maioria dos casos.

A introdução de novos jogadores não altera a filosofia da endogeinização apresentada. Podemos continuar considerando o número do estágio q como uma regra de decisão no caso de empate nas ordenação. Por exemplo, no caso de 3 jogadores. Podemos considerar que se $q = 1, 4, 7, ...$, o jogador 1 deve ganhar o bem de menor ordenação e o jogador 3 deve ganhar o bem de maior ordenação. Se $q = 2, 5, 8, ...$ o jogador 2 deve ganhar o bem de menor ordenação e o jogador 1 o bem de maior ordenação. Por fim; se $q = 3, 6, 9, ...$, o jogador 3 deve ganhar o bem de menor ordenação e o jogador 2 o bem de maior ordenação. Note que novamente o lucro *ex ante* não sofrerá alterações, enquanto a regra de desvio sofrerá as mesmas alterações do caso de 2 jogadores.

4 Conclusões

Este trabalho apresenta um modelo de conluio em leilões de primeiro preço repetidos no qual os agentes enviam mensagens sem custo sobre sua ordenação de preferências e sobre seu interesse em participar ou não do leilão. Neste ambiente, mostramos que o lucro esperado dos participantes do conluio é superior ao lucro obtido no caso de um conluio estático tácito. Além disso, mostramos que a superioridade de um modelo de conluio dinâmico argumentada por Aoyagi (2002) não se sustenta, o que implica que os ganhos do modelo apresentado por Aoyagi sobre o lucro esperado do modelo de McAfee & McMillan (1992) decorrem principalmente devido a introdução de um mecanismo de comunicação.

Com relação ao resultado de eficiência assintótica do conluio por meio do refinamento do mecanismo de comunicação apresentado por Pesendorfer (2000), observamos que a modelagem do jogo repetido pode levar a um *trade off* entre eficiência e possibilidade de conluio, pois há uma elevação da taxa de paciência necessária para a sustentação do conluio a medida que aumentamos o número de bens ordenados em uma mesma mensagem.

Quanto ao comportamento do leiloeiro, confirmamos os resultados de Johnson & Robert (1999) com relação a ambiguidade do preço de reserva como instrumento para quebra do conluio, bem como quanto a superioridade de regras de desempate *ex ante* frente a regras *ex post*.

[11] Por exemplo, no caso em que ocorre um empate em um período par e o bem de maior ordenação é o do 2o. leilão.

[12] Este trabalho mostra que os participantes de um conluio sempre irão preferir uma regra de desempate *ex post* a uma regra *ex ante*.

Os melhores instrumentos para redução dos ganhos do conluio e/ou quebra de conluio são o aumento do número de jogadores e rigidez no cronograma, embora estes instrumentos podem não estar a disposição do leiloeiro.

References

[1] Aoyagi, Masaki - "Bid Rotation and Collusion in Repeated Auctions" - mimeo, (2002)

[2] Campbell, C. M. - "Coordination in Auctions with entry" - Journal of Economic Theory 82, 425-540 (1998)

[3] Cramton, Peter & Schwartz, Jesse A. - "Collusive Bidding: Lessons from the FCC Spectrum Auctions" -Journal of Regulatory Economics, 17, 229-252, (2000)

[4] Fudenberg, D. & Tirole, Jean - Game Theory - MIT Press, (1991)

[5] Guidorizzi, Hamilton Luiz - Um Curso de Cálculo - Vol. 1 , 2a. Ed. - LTC Editora, (1995)

[6] Klemperer, Paul - "What Really Matters in Auction Design" - mimeo, (2000)

[7] Johnson, Paul & Robert, Jacques - "Collusion in a model of repeated auctions" - CAHIER 0799 working paper, (1999)

[8] Levin, Jonathan - "Lecture Notes: Auction Theory" - mimeo, (2002)

[9] Lima, Elon L. - Curso de Análise - Vol. 1 - 10a. edição - Projeto Euclides - IMPA , (2000)

[10] Maskin, Eric & Riley, John - "Existence and Uniqueness of Equilibrium in Sealed High Bid Auctions" - UCLA working paper no. 407, (1986)

[11] Matthews, Steven - "A Technical Primer on Auction Theory I: Independent Private Values" - Discussion Paper n^{o}1096 - Northwestern University, (1995)

[12] McAfee, R. P. & McMillan, J. - "Bidding Rings" - American Economic Review, 82, 579-99, (1992)

[13] McAfee, R. P. & McMillan, J. - "Game Theory and Competition" - University of Texas Working Paper, (1998)

[14] Meyer, Paul - Probabilidade: Aplicações à Estatística - LTC Editora, (1978)

[15] Milgrom, Paul - "Auction Theory" in: Truman F. Bewley (ed.), Advances in Economic Theory, Fifth World Congress. Cambrigde: Cambrigde University Press, (1987)

[16] Pesendorfer, Martin - "A Study of Collusion in First-Price Auctions" - Review of Economic Studies, 67, (2000);

[17] Riley, John & Samuelson, William - "Optimal Auctions" - UCLA working paper no. 152, (1979)

[18] Robinson, M. S. - "Collusion and the Choice of Auction"- Rand Journal of Economics, Vol. 16, No. 1, (1985)

[19] Schmidt, Klaus M. & Schnitzer, Monika - “Methods of Privatization: Auctions, Bargaining and Give-Aways” -mimeo, (1996)

[20] Skrzypacz, A. & Hopenhayn, H. - “Bidding Rings in Repeated Auctions”- RCER working paper no. 463, (1999)

5 Apêndice

Solução da receita do agente utilizando estatísticas de Ordem

Inicialmente, consideremos $b_0 = 0$.

Fórmula de valor esperado para o caso do bem ser ordenado em $i^{ésimo}$ lugar na ordenação de m bens:

$$\int_0^1 \frac{m!}{(i-1)!\,(m-i)!}\theta F(\theta)^{m-i}\left[1-F(\theta)\right]^{i-1} f(\theta)\,d\theta$$

Probabilidade do vencedor ter ordenado o bem na $i^{ésima}$ posição é:

$$\left[1-\frac{(i-1)}{m}\right]^n - \left[1-\left(\frac{i}{m}\right)\right]^n$$

$n =$ número de jogadores.

O valor esperado por contrato é dado por:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left[1-\frac{(i-1)}{m}\right]^n - \left[1-\left(\frac{i}{m}\right)\right]^n\right] \times \int_0^1 \frac{m!}{(i-1)!\,(m-i)!}\theta F(\theta)^{m-i}\left[1-F(\theta)\right]^{i-1} f(\theta)\,d\theta$$

Como a probabilidade de cada jogador obter um contrato, *ex ante* é $\frac{1}{n}$, temos que o retorno esperado de um jogador por contrato será:

$$\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\left[1-\frac{(i-1)}{m}\right]^n - \left[1-\left(\frac{i}{m}\right)\right]^n\right] \times \int_0^1 \frac{m!}{(i-1)!\,(m-i)!}\theta F(\theta)^{m-i}\left[1-F(\theta)\right]^{i-1} f(\theta)\,d\theta\right\}$$

Para o caso de dois jogadores, temos:

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\left(1-\frac{(i-1)}{2}\right)^{2}-\left(1-\frac{i}{2}\right)^{2}\right]\times\int_{0}^{1}\frac{2!}{(i-1)!\,(2-i)!}\theta F(\theta)^{i-1}\left[1-F(\theta)\right]^{2-i}f(\theta)\,d\theta$$

$$\frac{3}{4}\left(\left[2E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\right]\right)+\frac{1}{4}\left(2\left[E\left(\theta\right)-E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\right]\right)=\frac{1}{2}E\left(\theta\right)+E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)$$

Como a probabilidade de cada jogador obter um contrato, *ex ante* é $\frac{1}{2}$, temos que o retorno esperado de um jogador por contrato será:

$$\frac{1}{2}E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\ +\ \frac{1}{4}E\left(\theta\right)$$

Consideremos agora que $b_0 > 0$, ainda no caso de dois jogadores. Neste caso, temos:

Valor esperado da valoração do bem ordenado em 1o. lugar:

$$\int_{b_0}^{1}\frac{2!}{0!1!}\frac{\theta F\left(\theta\right)f\left(\theta\right)}{1-F\left(b_0\right)^{2}}d\theta=$$
$$\frac{2}{\left[1-F\left(b_0\right)^{2}\right]}\int_{b_0}^{1}\theta F\left(\theta\right)f\left(\theta\right)d\theta$$

Valor esperado da valoração do bem ordenado em 2o. lugar:

$$\int_{b_0}^{1}\frac{2!}{1!0!}\frac{\left(\theta-b_0\right)F\left(\theta\right)^{0}\left[1-F\left(\theta\right)\right]^{1}f\left(\theta\right)}{\left[1-F\left(b_0\right)\right]^{2}}d\theta=2\int_{b_0}^{1}\left(\theta-b_0\right)\frac{\left[1-F\left(\theta\right)\right]^{1}f\left(\theta\right)}{\left[1-F\left(b_0\right)\right]^{2}}d\theta$$

No entanto, agora as probabilidades com relação à ordenação do bem para o vencedor se alteram, pois haverá casos em que ninguém ganhará o bem. A probabilidade do bem que vale a pena ser comprado ser ordenado em 1o. lugar passa a ser:

$$P\left(outro\ bem\ < b_0\right)\times 1\ +P\left(outro\ bem\ \geq b_0\right)\times P\left(bem\ a\ ser\ vendido\ > outro\ bem\right)=$$
$$=F\left(b_0\right)\times 1\ +\ \left(1-F\left(b_0\right)\right)\times\frac{1}{2}$$

Com isso, temos que a probabilidade do vencedor ter ordenado o bem em 1o. lugar será:

$$1 - \ P\left(todos\ tenham\ ordenado\, o\, bem\, em\ 2o.lugar\right) = \ 1 - \ \left(\frac{1-F\left(b_0\right)}{2}\right)^2$$

Assim, o valor esperado por contrato, para cada agente, é dado por:

$$F\left(b_0\right)\left(1-F\left(b_0\right)\right)\int_{b_0}^{1}\frac{\left(\theta-b_0\right)}{1-F\left(b_0\right)}f\left(\theta\right)d\theta\ +$$
$$\frac{\left(1-F\left(b_0\right)\right)^2}{2}\left[\begin{array}{c}\left[1-\frac{(1-F(b_0))^2}{4}\right]\frac{2}{\left[1-F(b_0)^2\right]}\int_{b_0}^{1}\left(\theta-b_0\right)F\left(\theta\right)f\left(\theta\right)d\theta+ \\ \frac{(1-F(b_0))^2}{4}\frac{2}{[1-F(b_0)]^2}\int_{b_0}^{1}\left(\theta-b_0\right)\left[1-F\left(\theta\right)\right]^1 f\left(\theta\right)d\theta\end{array}\right]$$

$$F\left(b_0\right)\int_{b_0}^{1}\left(\theta-b_0\right)f\left(\theta\right)d\theta\ +\frac{\left(1-F\left(b_0\right)\right)^2}{2}\left[\begin{array}{c}\frac{3\ +2F(b_0)\ -F(b_0)^2}{2\left[1-F(b_0)^2\right]}\int_{b_0}^{1}\left(\theta-b_0\right)F\left(\theta\right)f\left(\theta\right)d\theta+ \\ \frac{1}{2}\int_{b_0}^{1}\left(\theta-b_0\right)\left[1-F\left(\theta\right)\right]f\left(\theta\right)d\theta\end{array}\right]=$$
$$\left[\frac{1+2F\left(b_0\right)\ +F\left(b_0\right)^2}{4}\right]\int_{b_0}^{1}\left(\boldsymbol{\theta}-b_0\right)f\left(\boldsymbol{\theta}\right)d\theta\ +\frac{1-F\left(b_0\right)}{2}\int_{b_0}^{1}\left(\boldsymbol{\theta}-b_0\right)F\left(\boldsymbol{\theta}\right)f\left(\boldsymbol{\theta}\right)d\theta$$

Considerando apenas o incentivo a entrar em conluio (sem levar em conta o incentivo a desvio), temos o seguinte problema:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{4}\left\{1\ -\ \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right\} \\ +\frac{1}{4}E(\theta)\end{array}\right\}\ \geq\ \sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\left\{1-E\left[\theta\right]-\int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right\}=$$
$$\frac{1}{4}\left(1\ -\ \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\ +E(\theta)\right)\ \geq\ \left(1-E\left[\theta\right]-\int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right).$$

$$\int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\ -\frac{1}{4}\int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\ +E\left[\theta\right]\ +\frac{1}{4}E(\theta)\ \geq\ \frac{3}{4}.$$
$$E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\leq\frac{5}{6}E\left(\theta\right).$$

Lema 2.2: Se $F_1(\theta)$ *domina estocasticamente em 2ª ordem* $F_2(\theta)$, *temos que vale a seguinte expressão:*

$$\int_0^{\overline{\theta}} F_1(\theta)^2\, d\theta \geq \int_0^{\overline{\theta}} F_2(\theta)^2\, d\theta.$$

Prova : *A expressão acima pode ser reescrita como:*

$$\int_0^{\overline{\theta}} F_1(\theta)^2 - F_2(\theta)^2\, d\theta \geq 0.$$

Rearranjando o lado direito, obtemos:

$$\int_0^{\overline{\theta}} (F_1(\theta) + F_2(\theta))(F_1(\theta) - F_2(\theta))\, d\theta \overset{I.P.}{=}$$
$$(F_1(\theta) + F_2(\theta)) \int_0^{\theta} (F_1(x) - F_2(x))\, dx \Big|_0^{\overline{\theta}} - \int_0^{\overline{\theta}} \left[(f_1(\theta) + f_2(\theta)) \int_0^{\theta} (F_1(x) - F_2(x))\, dx \right] d\theta.$$

Pela dominância de 2ª ordem, temos que:

$$\int_0^{\overline{\theta}} (F_1(x) - F_2(x))\, dx = 0.$$

e

$$\int_0^{\theta} (F_1(x) - F_2(x))\, dx \leq 0 \quad \forall\theta.$$

Com isso, lembrando que $f(\theta) \geq 0$, *temos:*

$$\int_0^{\overline{\theta}} (F_1(\theta) + F_2(\theta))(F_1(\theta) - F_2(\theta))\, d\theta = - \int_0^{\overline{\theta}} \left[(f_1(\theta) + f_2(\theta)) \int_0^{\theta} (F_1(x) - F_2(x))\, dx \right] d\theta \geq 0.$$

¥

Prova da Proposição 2.3*:*

Pela expressão de $\overline{\delta}$, *obtemos:*

$$\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial\left[\int_0^{\overline{\theta}} F(\theta)^2\,d\theta\right]} = \frac{-8E(\theta)}{\left(1\ -\ \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\ + E(\theta)\ \right)^2} \leq 0.$$

Portanto, pelo Lema 2.2, *temos que* $\overline{\delta}_1 \leq \overline{\delta}_2$ ¥

Caso de $\delta(\theta_i^1)\ < \theta_i^0$.

Prova do Lema 2.4:

a) *Pelo princípio de desvio, temos que:*

$$\delta^2\left\{\frac{1}{4}\left(1\ +\ E[\theta]\ -\int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\ \right)\right\} + \delta\left(-1 + E[\theta] + \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta + \Delta\theta\right) - \Delta\theta \geq\ 0.$$

Tomando o valor de fronteira $\overline{\delta}$, *temos a expressão*

$$\overline{\delta}^2\left\{\frac{1}{4}\left(1\ +\ E[\theta]\ -\int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\ \right)\right\} + \overline{\delta}\left(-1 + E[\theta] + \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta + \Delta\theta\right) - \Delta\theta =\ 0 \quad (a)$$

Inicialmente, consideremos $\Delta\theta = 0$. *Com isso, obtemos a seguinte expressão:*

$$\overline{\delta}\ =\ \frac{4\left(1 - E[\theta] - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right)}{\left(1\ -\ \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\ + E(\theta)\ \right)}.$$

$$\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial E(\theta)} = \frac{-8 + 8\int_0^1 F(\theta)^2\,d\theta}{\left(1 + E(\theta) - \int_0^1 F(\theta)^2\,d\theta\right)^2} \leq 0.$$

Com isso, pelo Teorema da função implícita, devemos obter o mesmo sinal, ou seja:

$$\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial E(\theta)} = -\frac{\left(\frac{\overline{\delta}^2}{4} + \overline{\delta}\right)}{\frac{\overline{\delta}}{2}\left(1 + E(\theta) - \int_0^1 F(\theta)^2\,d\theta\right) + \left(1 - E(\theta) + \int_0^1 F(\theta)^2\,d\theta\right)} \leq 0.$$

Como o numerador da expressão acima é sempre positivo , temos que o denominador será positivo também. A partir deste resultado, sabendo que a expressão para $\Delta\theta \neq 0$ *fica:*

$$\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial E(\theta)} = -\frac{\left(\frac{\overline{\delta}^2}{4} + \overline{\delta}\right)}{\frac{\overline{\delta}}{2}\left(1 + E(\theta) - \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta\right) + \left(1 - E(\theta) + \int_0^1 F(\theta)^2 d\theta + \Delta\theta\right)}.$$

Temos que $\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial E(\theta)} \leq 0, \ \forall\Delta\theta \geq 0$ ¥

b) *Como no item a, inicialmente consideremos* $\Delta\theta = 0$*.Com isso, obtemos a seguinte expressão:*

$$\overline{\delta} \ = \ \frac{4(1 - E[\theta] - u)}{(1 \ - \ u + E(\theta)\ )}.$$

$$\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial u} = \frac{-8E(\theta)}{(1 \ - \ u \ + E(\theta)\ )^2} \leq 0.$$

Com isso, pelo Teorema da função implícita a partir de (a)*, devemos obter o mesmo sinal, ou seja:*

$$\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial u} = -\frac{\left(-\frac{\overline{\delta}^2}{4} + \overline{\delta}\right)}{\frac{\overline{\delta}}{2}(1 + E(\theta) - u) + (1 - E(\theta) + u)} \leq 0.$$

Como o numerador da expressão acima é sempre positivo (pois $0 \leq \delta \leq 1$*) , temos que o denominador será positivo também. A partir deste resultado, sabendo que a expressão para* $\Delta\theta \neq 0$ *fica:*

$$\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial u} = -\frac{\left(-\frac{\overline{\delta}^2}{4} + \overline{\delta}\right)}{\frac{\overline{\delta}}{2}(1 + E(\theta) - u) + (1 - E(\theta) + u + \Delta\theta)}.$$

Temos que $\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial u} \leq 0, \ \forall\Delta\theta \geq 0$ ¥.

Prova da Proposição 2.5*: A partir do mecanismo de lances idênticos apresentado por McAfee&McMillan (1992), obtemos o seguinte lucro agregado:*

$$M\&M=\frac{1+F(b_0)}{2}\int_{b_0}^{1}(1-F(\theta))\,d\theta=\left[\frac{1+F(b_0)}{2}\right]\left[(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)\,d\theta\right]$$

A introdução do mecanismo de comunicação leva ao seguinte lucro esperado:

$$\left[\frac{1+F(b_0)}{2}\right]^2\left\{(1-b_0)-\int_{b_0}^{1}F(\theta)\,d\theta\right\}\ +\frac{1-F(b_0)}{4}\left\{(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)^2\,d\theta\right\}=$$
$$\left[\frac{1+F(b_0)}{2}\right]M\&M+\frac{1-F(b_0)}{4}\left\{(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)^2\,d\theta\right\}$$

$$\Delta(b_0)=\frac{1-F(b_0)}{4}\left\{(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)^2\,d\theta\right\}\ -\ \left[\frac{1-F(b_0)^2}{4}\right]\left[(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)\,d\theta\right]$$

Note que $\Delta(0)\ >0$ e $\Delta(1)=0$. Como:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial b_0}\ =\ -\frac{f(b_0)}{4}\left\{(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)^2\,d\theta\right\}\ +\frac{1-F(b_0)}{4}\ \left\{-1\ +F(b_0)^2\right\}$$
$$+\frac{F(b_0)\,f(b_0)}{2}\left\{(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)\,d\theta\right\}\ +\left[\frac{1-F(b_0)^2}{4}\right]\{1\ -\ F(b_0)\}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial b_0}=-\ \frac{f(b_0)}{4}\left\{(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)^2\,d\theta\right\}\ +\frac{F(b_0)\,f(b_0)}{2}\left\{(1-b_0)\ -\int_{b_0}^{1}F(\theta)\,d\theta\right\}=$$
$$=\frac{f(b_0)}{4}\left\{\int_{b_0}^{1}[1-F(\theta)]\left\{\underbrace{2F(b_0)\ -[1+F(\theta)]}_{<0}\right\}\,d\theta\right\}\leq 0$$

Temos que $\Delta(b_0)$ é positivo e decrescente.¥

Prova da Proposição 2.6: A relação apresentada por Aoyagi (2002) como limite inferior do payoff esperado *ex ante* do participante do conluio[13], transcrita para a notação que utilizamos é dada por:

$$u^d>L\equiv\frac{E(\theta)}{E(\theta)+2E(\theta F(\theta))}E(\theta F\theta)+\frac{2E(\theta F(\theta))}{E(\theta)+2E(\theta F(\theta))}\frac{E(\theta)}{2}.$$

[13] pagina 13.

No caso que estudamos, com dois jogadores e dois bens, temos:

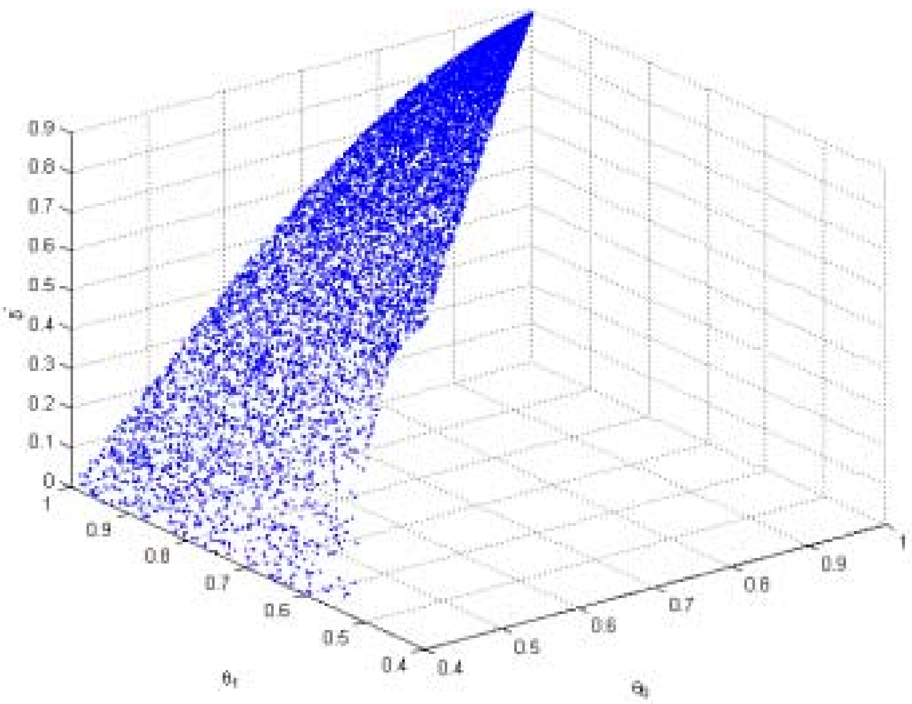
$$u^s = \frac{1}{2} E\left(\theta F\left(\theta\right)\right) + \frac{1}{2} \frac{E\left(\theta\right)}{2}.$$

Pelas condições acima, podemos afirmar que $u^s > L$, de modo que não há como relacionar u^d a u^s¥

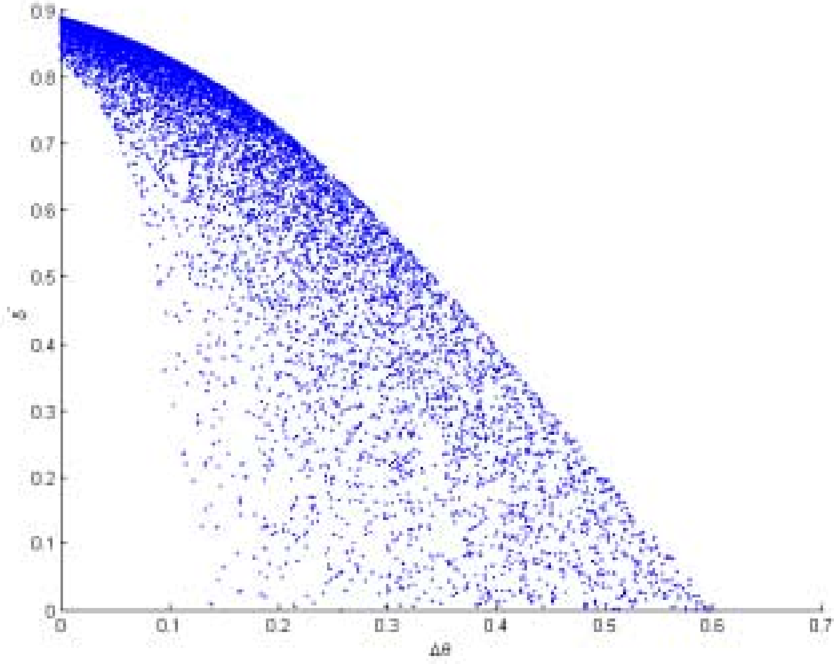
Questão da elevação do preço de reserva no caso de dois agentes e dois bens, com valorações extraídas de $U\left[0,1\right]$:

a) Exemplos:

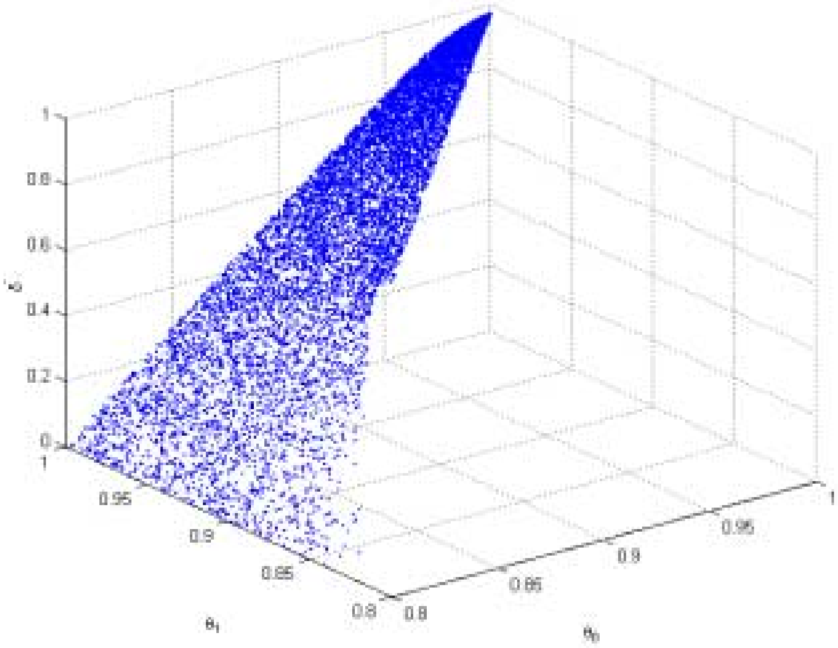
Supondo $b_0 = 0.4$ e considerando que θ_i^0 e θ_i^1 são maiores que b_0, temos:



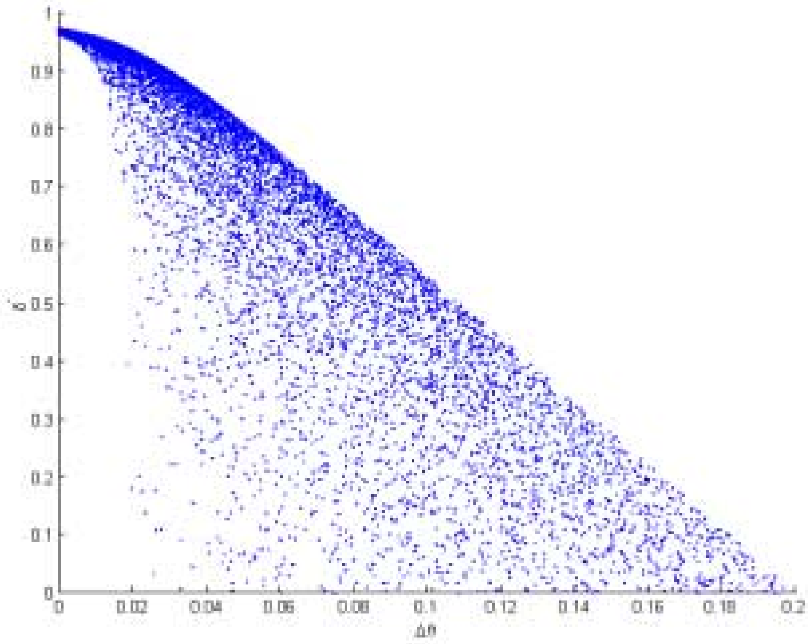
Considerando a diferença entre θ_i^1 e θ_i^0, temos:



No caso de $b_0 = 0.8$, temos:



Considerando a diferença entre θ_i^1 e θ_i^0, temos:



Com relação a questão de cálculo numérico, as derivadas foram feitas para 1000 valores dos constantes de cada problema (extraídas de forma aleatória de distribuições uniformes), sendo o passo da derivada numérica de $0,0001$.

Lema 3.1: *O preço de reserva ótimo para o leiloeiro é tal que :*

$$b_0 = b^* + \frac{1 - F(b_0)}{f(b_0)}. \tag{9}$$

Prova: *O lucro esperado do Leiloeiro é dado por:*

$$\Pi_L^{concorr\hat{e}ncia}(b^*) = b^* + \left\{ \int_{b_0}^{\overline{\theta}} \left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} - b^* \right) F(\theta) f(\theta) \, d\theta \right\}.$$

Consideremos que o leiloeiro pode escolher b_0 (consequentemente θ^*) de forma a maximizar o programa acima, ou seja:

$$\max_{\theta^*} \Pi_L^{concorr\hat{e}ncia}(b^*) = b^* + \left\{ \int_{b_0}^{\overline{\theta}} \left(\theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} - b^* \right) F(\theta) f(\theta) \, d\theta \right\}.$$
$$s.a. \; b_0 \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$$

Olhemos para o problema relaxado. A condição de 1ª ordem fica:

$$\left(b_0 - \frac{1 - F(b_0)}{f(b_0)} - b^*\right) F(b_0) f(b_0) = 0.$$

Como $F(b_0) f(b_0) > 0$ *temos que:*

$$b_0 - \frac{1 - F(b_0)}{f(b_0)} - b^* = 0.$$

Logo:

$$b_0 = \frac{1 - F(b_0)}{f(b_0)} + b^*.$$

¥

No caso de conluio, temos que:

Lema 3.2: *Se* $b_0 < \bar{\theta}$*, no ótimo teremos,*

$$b_0^{conluio} = b^* + \frac{1 - F\left(b_0^{conluio}\right)^2}{2F\left(b_0^{conluio}\right) f\left(b_0^{conluio}\right)}. \tag{10}$$

e

$$b_0^{conluio} > b_0^{concorrência}$$

Prova: *A partir da expressão de receita do Leiloeiro no caso de conluio, a condição de primeira ordem de maximização em* b_0 *fica:*

-

$$b_0^{cl} = b^* + \frac{1 - F\left(b_0^{cl}\right)^2}{2F\left(b_0^{cl}\right) f\left(b_0^{cl}\right)} = b^* + \left[\frac{1 + F\left(b_0^{cl}\right)}{2F\left(b_0^{cl}\right)}\right] \frac{1 - F\left(b_0^{cl}\right)}{f\left(b_0^{cl}\right)}.$$

Sabemos por Maskin&Riley (1986), que o equilíbrio de concorrência no leilão de 1ºpreço estático é único. Logo, para mostrar que o $b_0^{cl} > b_0$ *na CPO da maximização de lucro do caso de concorrência:*

$$-\left(b_0^{cl}-\frac{1-F\left(b_0^{cl}\right)}{f\left(b_0^{cl}\right)}-b^*\right)F\left(b_0^{cl}\right)f\left(b_0^{cl}\right)<0.$$

Como sabemos que $F\left(b_0^{cl}\right)f\left(b_0^{cl}\right)>0$, *temos que mostrar que:*

$$\left(b_0^{cl}-b^*\right)>\frac{1-F\left(b_0^{cl}\right)}{f\left(b_0^{cl}\right)}.$$

Substituindo b_0^{cl} *do lado esquerdo da equação acima, obtemos:*

$$\frac{1}{2F\left(b_0^{cl}\right)}+\frac{1}{2}>1.$$

Como $F\left(b_0^{cl}\right)<1$, *obtemos o resultado desejado* ¥

Prova da Proposição 3.3:

$$\Delta\Pi_L\left(b_0\right)=\left\{2\int_{b_0}^{\overline{\theta}}\left(\theta-\frac{1-F\left(\theta\right)}{f\left(\theta\right)}\right)F\left(\theta\right)f\left(\theta\right)d\theta\right\}-b_0\left[1-F\left(b_0\right)^2\right]=$$

$$\Delta\Pi_L\left(b_0\right)=2\int_{b_0}^{\overline{\theta}}\theta f\left(\theta\right)\left(1-F\left(\theta\right)\right)d\theta-b_0\left[1-F\left(b_0\right)\right]^2.$$

Note que: $\Delta\Pi_L\left(0\right)=2\left[E\left(\theta\right)-E\left(\theta F\left(\theta\right)\right)\right]>0$ e $\Delta\Pi_L\left(\overline{\theta}\right)=0$. Além disso, temos que:

$$\frac{d\Delta\Pi_L\left(b_0\right)}{db_0}=-\left[1-F\left(b_0\right)\right]^2\leq 0,\forall\, b_0\ \in[0,\overline{\theta}]$$

$$\frac{d^2\Delta\Pi_L\left(b_0\right)}{d\left(b_0\right)^2}=2f\left(b_0\right)\left(1-F\left(b_0\right)\right)>0.$$

Logo, $\Delta\Pi_L\left(b_0\right)$ é uma função estritamente convexa. Pelas condições iniciais e finais encontradas acima, temos que $\Delta\Pi_L>0,\ \forall\, b_0\ \in[0,\overline{\theta}]$ ¥

Prova do Lema 3.4:

a)

$$\frac{\partial \Pi^{concorrência}}{\partial b^*} = 1 - 2\int_{b_0}^{\overline{\theta}} F(\theta) f(\theta)\, d\theta = 1 - \left(1 - F(b_0)^2\right) = F(b_0)^2 > 0.$$

$$\frac{\partial \Pi^{conluio}}{\partial b^*} = F(b_0)^2 > 0.$$

¥

b)

$$\frac{\partial \Pi^{concorrência}}{\partial b_0} = -2(b_0 - b^*) F(b_0) f(b_0) + 2\left(F(b_0) - F(b_0)^2\right).$$

$$\frac{\partial \Pi^{conluio}}{\partial b_0} = -2(b_0 - b^*) F(b_0) f(b_0) + \left(1 - F(b_0)^2\right).$$

$$\frac{\partial \Delta \Pi}{\partial b_0} = -\left[(1 - F(b_0))^2\right] < 0.$$

¥